

# 白矮星的平衡态与坍塌

梁昊, 鲍依木, 王少莘, 宋雪洋, 冯顾言  
北京大学物理学院

June 4, 2014

摘要

本文主要讨论了关于白矮星半径与质量的关系。通过自由电子气的物态方程、牛顿引力势方程以及相互作用关系, 得到了不同质量范围内的白矮星中的电子化学势所满足的关于位置的非线性常微分方程, 无量纲化后通过数值试解得出解, 探讨了不同范围内半径对质量的函数关系, 并得出极端相对论情况下白矮星的质量上限——钱德拉萨卡极限。

Abstract

This paper mainly focuses on the functional dependence for radius on the mass of a white dwarf. Starting with state equations for free electron gas, the partial differentiating equations for Newton's gravitation potential and interaction law, we get the ordinary differentiating equations on the chemical potential in non-relativistic realm, relativistic realm and general cases respectively. After taking steps to make indexes dimensionless, we adopt numerical calculations with trial boundary conditions to procure the solution and further discuss the functional dependence. In addition, the famous Chandrasekhar limit, namely, the upper limit for the mass of a white dwarf is derived.

## 1 简介

白矮星 (white dwarf), 是由恒星在耗尽其中心区的核燃料 - 氢后, 依靠辐射力抵抗引力的机制失效后, 坍塌演化而成的高密度晚期恒星, 它的主要成分是氢聚变而成的氦核以及电离出的电子。

它们的密度极高, 一颗质量与太阳相当的白矮星体积只有地球一般的大小。极端高密度的电子产生的量子简并压力用以抵抗核子间强大的万有引力。

质量越大的白矮星半径越小, 密度越大, 电子的化学势越高直至与电子静能可比, 在相对论效应的作用下, 白矮星出现了质量上限, 这就是著名的钱德拉萨卡 (Chandrasekhar) 极限。

- 引力主要由氦核产生, 且只考虑牛顿引力。注意处处是电中性的

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi + 4\pi G\rho &= 0 \\ \rho &= (m_n + m_p)n_e\end{aligned}\quad (2)$$

- 星体半径为  $R$ , 总质量为  $M$

$$\left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=R} = -\frac{GM}{R^2}\quad (3)$$

- 费米面上的电子和核子通过某种相互作用联系起来达到平衡

$$\mu_e + (m_p + m_n)\phi = Constant\quad (4)$$

## 2 问题分析

### 2.1 模型假设

- 球对称星体
- 电荷背景处处为零
- 电子做索末菲自由电子气处理, 并做局域平衡假定

$$\begin{aligned}N_e &= \frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi k_m^3 \times \frac{V}{\pi^3} \times 2 \\ n_e &= \frac{k_m^3}{3\pi^3}\end{aligned}\quad (1)$$

### 2.2 基本方程

联立以上各式, 并利用  $m_p \approx m_n$ , 可得

$$\begin{aligned}\nabla^2\mu_e + \frac{16}{3\pi}Gm_p^2k_m^3 &= 0 \\ \left.\frac{d\mu_e}{dr}\right|_{r=R} &= -\frac{2GMm_p}{R^2}\end{aligned}\quad (5)$$

取  $\xi = r/R$ , 可将方程约简成

$$\begin{aligned}\nabla^2\mu_e + \frac{16}{3\pi}Gm_p^2R^2k_m^3 &= 0 \\ \left.\frac{d\mu_e}{d\xi}\right|_{\xi=1} &= -\frac{2GMm_p}{R}\end{aligned}\quad (6)$$

## 2.3 色散关系

在不同的情况下，可利用不同的色散关系

### 1. 经典情形

$$\frac{h^2 k_m^2}{2m_e} = \mu_e \quad (7)$$

### 2. 极端相对论情形

$$hk_m c = \mu_e \quad (8)$$

### 3. 一般相对论情形

$$\sqrt{m_e^2 c^4 + h^2 k_m^2 c^2} = \mu_e \quad (9)$$

下面将分别就这几个情形做讨论

## 3 经典情形

### 3.1 方程的导出与无量纲化

将色散关系 (7) 式带入 (6) 式中可得

$$\nabla^2 \mu_e + \frac{16}{3\pi} G m_p^2 R^2 \left( \frac{\sqrt{2m_e \mu_e}}{h} \right)^3 = 0 \quad (10)$$

为使方程无量纲化，取

$$f = \left( \frac{16}{3\pi} G m_p^2 \right)^2 \left( \frac{2m_e}{h^2} \right)^3 R^4 \mu_e \quad (11)$$

原方程化作

$$\frac{d^2 \zeta f}{d\zeta^2} + \zeta f^{3/2} = 0$$

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi=1} = - \left( \frac{16}{3\pi} \right)^2 \left( \frac{2G m_p m_e}{h^2} \right)^3 m_p^2 M R^3 \quad (12)$$

这是一个带一个边界条件的二阶常微分方程。考虑到  $\xi = 0$  是方程的奇点，而由物理考虑可以加上一个  $f(0)$  有界的自然边界条件。故方程在给定边界上的无量纲数时定解。

由于无量纲数中同时包含了星体的质量和半径。而我们期待通过获知一个星体的质量来获取这个星体的全部信息，因此我们可以在加上一条边界条件，如边界上的密度为零。这样我们就可以将边界上的无量纲数定下，得如下幂次关系

$$R \propto M^{-1/3} \quad (13)$$

那么我们能纯粹的由分析上得到结论，在非相对论情形，质量大小对于星体的密度分布等等信息没有实质性的影响，而只是影响了一个标度。

## 3.2 数值计算与结果

考虑到数值求解边值问题有相当的困难，以及方程带一个奇点。我们考虑将方程变成一个奇点附近的初值问题来求解。具体来说，我们令  $g = \zeta f$ ，并将问题写作

$$\sqrt{\zeta} \frac{d^2 g}{d\zeta^2} + g^{3/2} = 0$$

$$g|_{\zeta=\delta} = \delta k \quad (14)$$

$$g'|_{\zeta=\delta} = k$$

式中  $\delta$  取做一个相当小的正数。

在  $\zeta \in [\delta, 1]$  区域中求解方程，得到  $g(1)$  值。不断调整  $k$  的大小，直至找到  $g(1) = 0$  所对应的  $k$  值为止。由此就能简单的将其他东西确定下来。

图1是求解得到的相对密度分布曲线。

中心密度与平均密度之比为

$$\frac{\rho_0}{\bar{\rho}} = 5.990 \quad (15)$$

前面所说的无量纲数也被求得  $k = 129.334$ ，并由此可求出星体半径与质量的具体关系。

$$M R^3 = 129.334 \left( \frac{3\pi}{16} \right)^2 \left( \frac{h^2}{2G m_p m_e} \right)^3 \frac{1}{m_p^2}$$

$$= 2.684 \times 10^{51} \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \quad (16)$$

## 4 极端相对论情形

### 4.1 方程的导出与无量纲化

随着星体质量增大，半径减小，密度将会增大，相对论效应会变得不可忽略。为简单起见，我们先考虑极端相对论的情形。

将色散关系 (8) 式带入 (6) 式中可得

$$\nabla^2 \mu_e + \frac{16}{3\pi} G m_p^2 R^2 \left( \frac{\mu_e}{hc} \right)^3 = 0 \quad (17)$$

为使方程无量纲化，取

$$f = \sqrt{\frac{16G}{3\pi h^3 c^3}} m_p R \mu_e \quad (18)$$

原方程化作

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + f^3 = 0$$

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi=1} = -2 \sqrt{\frac{16}{3\pi}} \left( \frac{G}{hc} \right)^{3/2} m_p^2 M \quad (19)$$

同样，这是一个带一个边界条件的非线性二阶常微分方程。考虑到  $\xi = 0$  是方程的奇点，而由物理考虑可以加上一个  $f(0)$  有界的自然边界条件。故方程在给定边界上的无量纲数时定解。

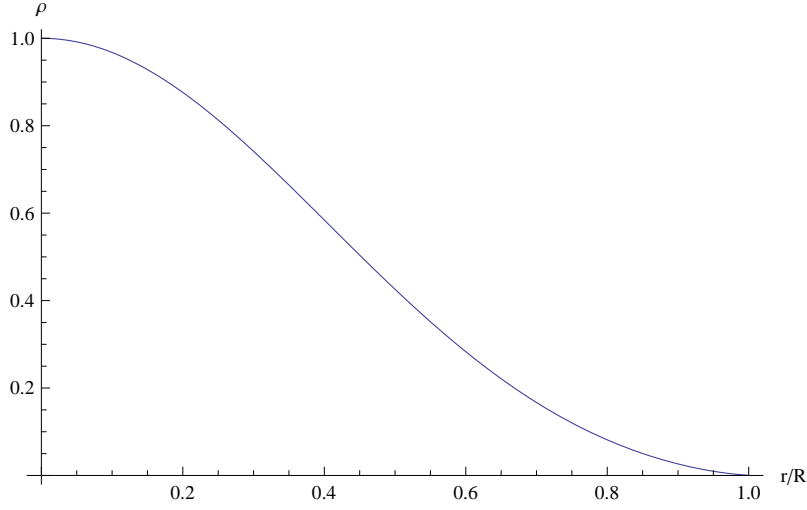


Figure 1: 经典白矮星相对密度分布

如果加入边界密度为零的条件，这个无量纲数也可以被唯一的确定下来。

与前面不同的是，边界条件只与星体质量有关而与半径无关。那我们就从分析上得到了结论：极端相对论的白矮星质量是一个常数，与半径无关。半径的取值只要使得电子是极端相对论的，也仅有电子是极端相对论的，就能够保证这个结论成立。

## 4.2 数值结果

这个微分方程定性上的性质和之前的那个完全一致，因此我们采用相同的办法处理。具体过程就不再重复了。

图2是求解得到的相对密度分布曲线。相对于经典情形，其质量更多的集中在星体内部。

中心密度与平均密度之比为

$$\frac{\rho_0}{\bar{\rho}} = 54.18 \quad (20)$$

边界上的无量纲数  $k = 2.01824$   
带回反解可以得到临界质量

$$\begin{aligned} M &= k \frac{\sqrt{3\pi}}{8m_p^2} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \\ &= 2.85 \times 10^{30} kg \\ &= 1.44 M_{Sun} \end{aligned} \quad (21)$$

正是著名的钱德拉萨卡极限。

另外，如果考虑不强加边界密度为零的条件，可以求出不同于 (21) 式给出的质量。但值得注意的一点是，求得的结果只能小于临界质量，而无法大于它。也就是说原边值问题在取一个大于临界质量的边界条件的时候无解。

## 5 一般相对论情形

### 5.1 方程的导出与无量纲化

将色散关系 (9) 带入 (6) 式中可得

$$\nabla^2 \mu_e + \frac{16}{3\pi} G m_p^2 R^2 \left( \frac{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}}{hc} \right)^3 = 0 \quad (22)$$

本问题中无量纲化比较困难，分几步进行：  
先令  $g = \mu_e / m_e c^2$ ，得到方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 g + \frac{16 G m_p^2 m_e^2 c}{3\pi h^3} R^2 (g^2 - 1)^{3/2} &= 0 \\ \frac{dg}{d\xi} \Big|_{\xi=1} &= -\frac{2GMm_p}{m_e c^2 R} \end{aligned} \quad (23)$$

再令

$$a = \sqrt{\frac{3\pi}{16} \frac{h^3}{G m_p^2 m_e^2 c}} = 3.86 \times 10^6 m$$

$$\zeta = \xi \frac{R}{a}$$

$$f = \zeta g$$

$$M_0 = \frac{\sqrt{3\pi}}{8} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2} = 1.41 \times 10^{30} kg \quad (24)$$

方程化作

$$\begin{aligned} \zeta^2 f'' + (f^2 - \zeta^2)^{3/2} &= 0 \\ f - \frac{R}{a} f' \Big|_{\zeta=R/a} &= \frac{M}{M_0} \\ f|_{\zeta=0} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

其中第三式为做代换后由于有界边条件而出现的。方程在给定两个无量纲数  $R/a, M/M_0$  后定解。

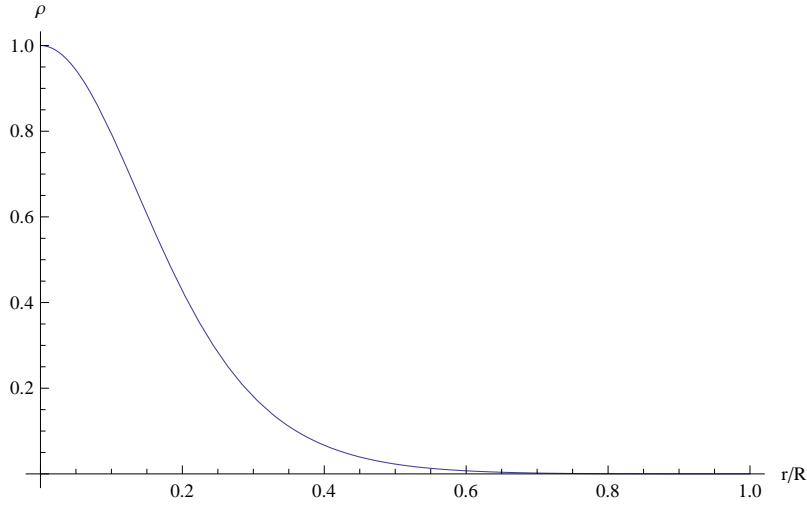


Figure 2: 极端相对论白矮星相对密度分布曲线

出于物理上的考虑，再加入在星体表面密度等于零的条件，即

$$f|_{\zeta=R/a} = \frac{R}{a} \quad (26)$$

通过这个约束可以得到两个无量纲数  $R/a, M/M_0$  所满足的关系。

## 5.2 数值求解与分析

由于数值求解边值问题的困难性，这里采用与之前类似的方法：在零点多给一个导数为  $k$  的边界条件，一路往外求解，直到  $f = 1$  为止；得到此处的  $\zeta$  与  $f'$  值，然后就可以找到  $R, M$  的一个对关系点；不断的改变  $k$  值，就能够把  $R, M$  的关系完整的描绘出来。

图3是数值计算得出的结果

在双对数标度的图4中能够更方便的看出一些性质

- 在低质量、大半径区域的点趋向于一条直线，拟合得到的斜率值为 -0.337，与经典情形下 (13) 式所预言的 -1/3 相符。
- 随着星体的质量接近某一极限值  $M_c$ ，半径将趋向于零。为求得这一临界值，将图3倒过来，并在临界质量附近放大，利用一条二次曲线外推出半径为零时的质量，得到

$$\begin{aligned} M_c &= (2.018249 \pm 0.000004)M_0 \\ &= 2.854 \times 10^{30} kg \\ &= 1.435M_{Sun} \end{aligned} \quad (27)$$

与极端相对论情形下推得的 (21) 式相符。

## 6 总结

本文出于电子简并压与核子引力势相平衡的考虑，对球对称的白矮星进行了求解。在给定边界密度为零的条件时，白矮星的质量和半径有一个唯一确定的函数关系 (图3)。当质量较小时，质量约正比于半径的负三次方。随着质量的增大，接近一临界值，半径会不断减小，直至模型的假定失效 (没有核反应、不计核子的量子效应、引力可以通过牛顿引力计算)。比这个临界质量更大的星体会坍缩成中子星，而不在本问题的考虑范围之内。

## References

- [1] Wikipedia "white dwarf" 词条. [http://en.wikipedia.org/wiki/White\\_dwarf](http://en.wikipedia.org/wiki/White_dwarf).
- [2] DAVID J.GRIFFITHS. 量子力学概论. 机械工业出版社, 2009.
- [3] 林宗涵. 热力学与统计物理学. 北京大学出版社, 2007.

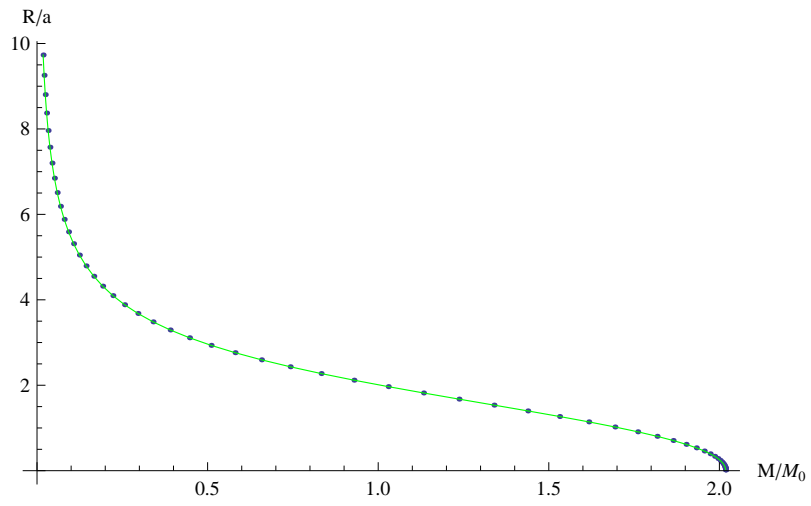


Figure 3: 相对论情形下白矮星质量 - 半径关系图

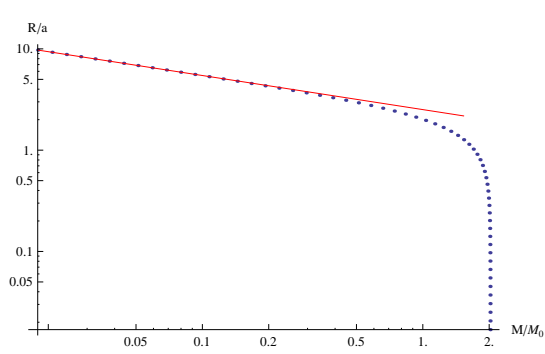


Figure 4: 白矮星质量 - 半径关系 (双对数标度)

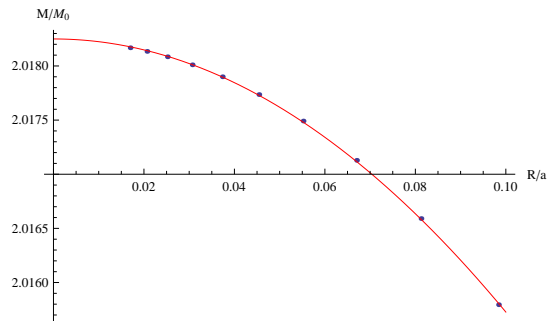


Figure 5: 临界质量附近半径 - 质量关系